Direction régionale Tunis2 **Lycée Zahrouni** **4 Math. 1**	***Devoir de contrôle n°1*** **Durée 2heures**	**Prof : M^r Riahi** **2012 - 2011**

Exercice 1 (3.75pts)

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des questions suivantes

- *Une réponse correcte justifier vaut* ***0.75pt***
- *Une réponse correcte sans justification vaut* ***0.5pt***
- *Une réponse incorrecte ou l'absence de réponse vaut* ***0pt***

1) L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $z = 4 + e^{i\alpha}$,avec $\alpha \in \mathbb{R}$, est un cercle
2) Soit z un nombre complexe et d = z + 2i, on a : $|d| = |z| + 2$
3) La fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}-1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ est continue sur IR
4) Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation : $mz^2 + 2m^2z - 1 = 0$ ou m est un nombre complexe de module 2
   On a alors : $|z_1 + z_2| = 4$
5) Le nombre complexe $u = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{24}}$ est une racine sixième de $8e^{i\frac{\pi}{6}}$

Exercice 2 (5pts)

On considère la suite réelle (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 5 - \sqrt{U_n^{\ 2} + 9} \ ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq U_n \leq 4$
   b) Montrer que la suite (U_n) est croissante
   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite
2) Soit $V_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{k=n} U_k$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$
3) On considère la suite réelle (W_n) définie par : $W_n = 2\sum_{k=0}^{k=n} U_{k+1} + n^2V_n$

   a) Montrer que pour tout entier naturel k tel que : $0 \leq k \leq n$, on a : $U_{k+1} \geq \dfrac{3 - U_k}{2}$

   (*On pourra remarquer que la suite (U_n) est croissante*)

   b) Déduire que $W_n \geq 3n + 3$; puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n$

Exercice 3 (5pts)

1) le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .Soient A et B les points d'affixes respectives i et (– i). et $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1
   Soit F l'application qui à tout point M d'affixe z non nul associe les points M' d'affixe respective
   $z' = \dfrac{z^2 + 1}{z}$; On désigne par M'' le symétrique de M par rapport à $(O, \vec{u})$
1) a) Déterminer F(A) et F(B)
   b) Montrer que si z est un imaginaire pur alors z' est un imaginaire pur

c) En déduire l'image de la droite (AB) par F

2) a) Montrer que si $z = e^{i\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$ alors z' = 2cosα

En déduire que si M est un point de cercle ($\mathscr{C}$) alors M' décrit un segment qu'on précisera

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z' = 2\cos\alpha$ (on donnera l'écriture exponentielle des solutions trouvées)

3) a) Vérifier que pour tout nombre complexe z non nul on a : $z' - z = \dfrac{1}{z}$

b) En déduire que $\mathrm{MM}' = \dfrac{1}{\mathrm{OM}}$ et que $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}''}$ sont deux vecteurs colinéaires de même sens

c) Montre alors que si M est un point du cercle ($\mathscr{C}$) alors OMM'M'' est un losange

Exercice 4 (6,25pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On a représentée ci-dessous la courbe représentative (C) d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ .On sait que la courbe (C) admet :

- Une asymptote D d'équation : y = 3 – x au voisinage de +∞
- Une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de – ∞

1) En utilisant le graphique

a) Déterminer : $\mathrm{f}(0)$; $\mathrm{f}(-1)$ et $\mathrm{f}([2,+\infty[)$

b) Déterminer : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{f}(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (\mathrm{f}(x) + x - 3)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\mathrm{fof}(x)}{\mathrm{f}(x)}$

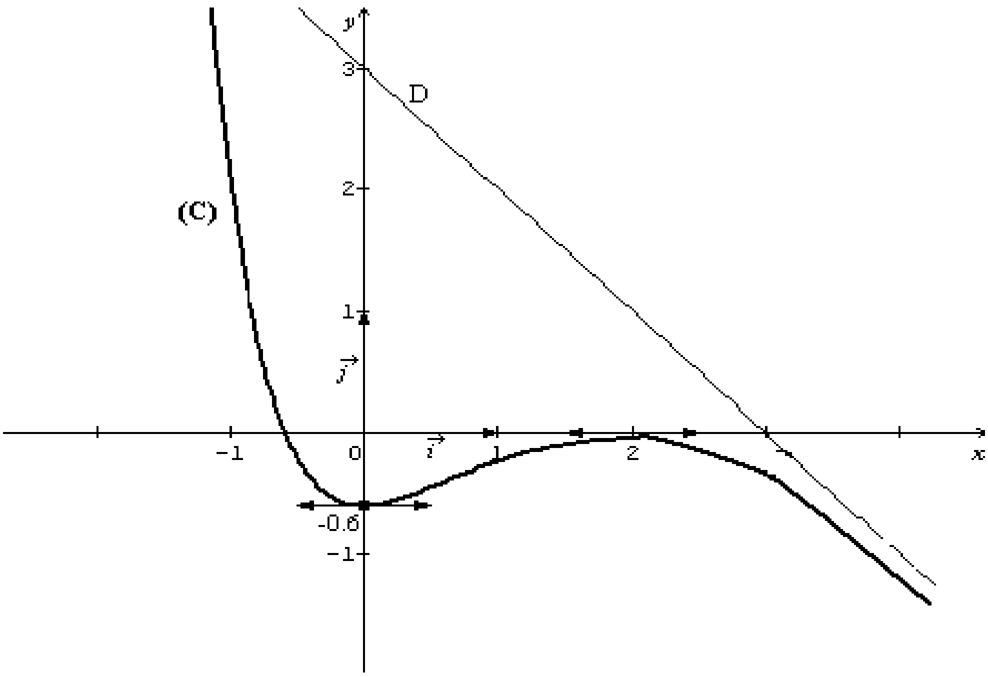
c) Dresser le tableau de variation de f

2) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans l'intervalle] – 1,0 [

3) Soient les fonctions : $\mathrm{g}(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $\mathrm{h}(x) = \mathrm{gof}(x)$

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction h

b) Calculer $\lim\limits_{x \to \alpha} \mathrm{h}(\mathrm{x})$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.



BON TRAVAIL